关于明暗交界线的研究

朱瑾

一、 定义

美术中的明暗交界线是指素描中灰部和暗部的交界部分。本文中对明暗交界线的定义是均匀的平行光照射到曲面而形成的亮度渐变部分（图 1.1）。两者虽有微小差别，但总体上是共通的。

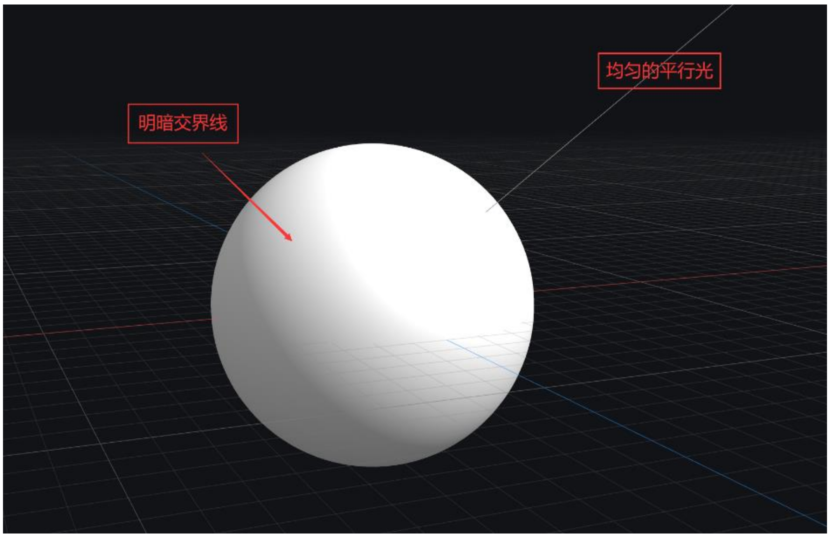

图 1.1 明暗交界线的定义

二、 形成原因与量化公式

本文以圆球体表面代替任意曲面进行研究，且只考虑一束均匀的平行光的照射情况。我们先把圆球体抽象为一个多面体，当一束均匀的平行光照射到这个多面体时，每个受光面（接受到光线照射的面）接受光线的角度，即它与光线的夹角是不同的（图 2.1）。

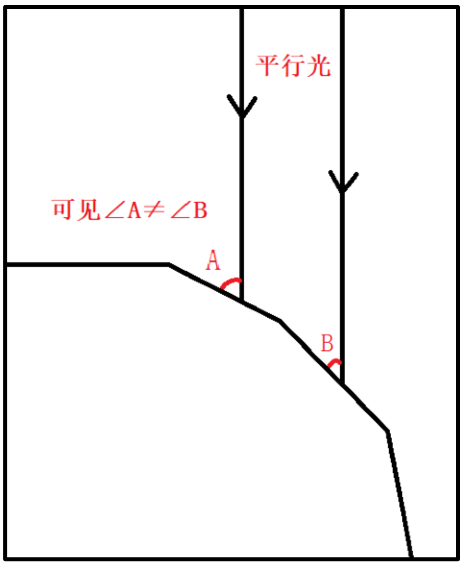

图 2.1

根据常识，受光面的亮度与其接受光线的角度有关，且这个角度越接近 90°（受光面与光线垂直），受光面越亮（图 2.2、图 2.3）。事实果真如此吗？

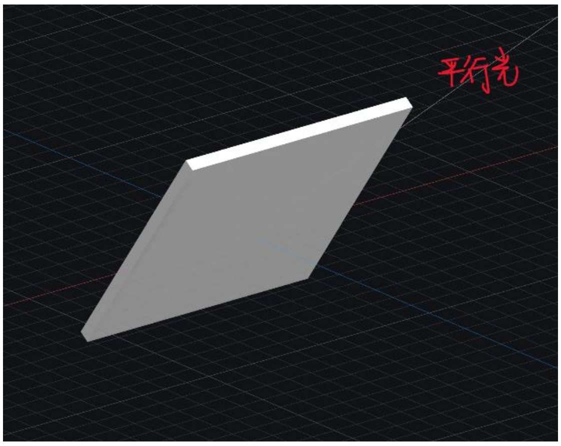

图 2.2 受光面较暗

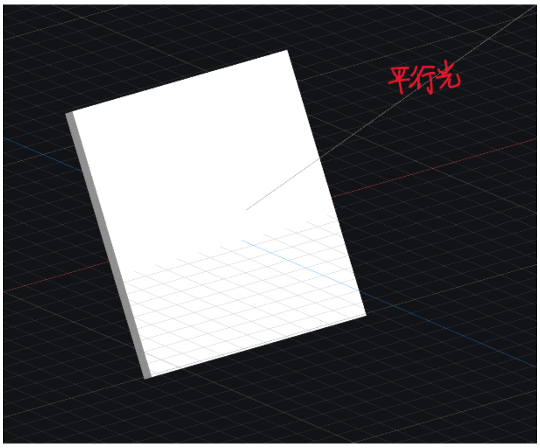

图 2.3 受光面较亮

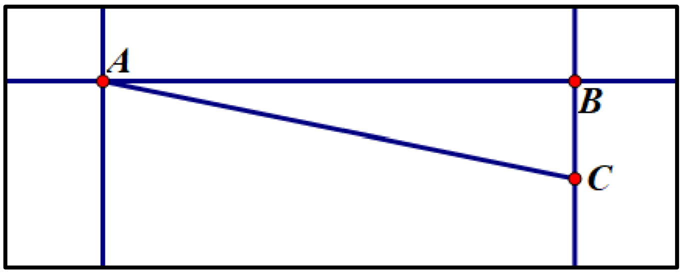

图 2.4

如图 2.4，线段 AC 代表一个受光面，AB 代表一个垂直于一束均匀的平行光的平面（AB⊥BC）。因为光线是均匀的，即光线密集程度一定，所以光线数量和其在该平面所占的面积成正比，也和 AB 的长度成正比。AB 上的所有光线最终都会到达受光面 AC,所以 AC 上含有的光斑的数量等于 AB 上的光线的数量。AC 上含有的光斑越多，AC 越亮，又因为这些光线是均匀的，所以 AC 上含有的光斑越多，必然导致这些光斑的密集程度越高。而 AC 上的光斑的密集程度为

$$\frac{AB}{AC}$$

所以当 AB 与 AC 的比值变大时，AC 就越亮，因此这个公式也是计算

受光面 AC 的亮度的公式。

当 AC 的倾斜程度改变时，AC 变长了，但 AB 不变（如图 2.5），所以 AB 与 AC 的比值变小了，AC 变暗了。由此进一步证实了这个公式是正确的。

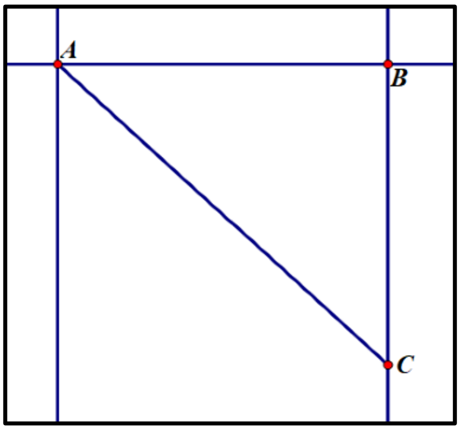

图 2.5

根据这个公式，当 AC=AB 时，AB 与 AC 的比值达到最大值，AC 的亮度达到最高点。此时有 AC//AB，而 AB⊥光线，所以 AC⊥光线。因此，受光面与光线的夹角越接近 90°（受光面与光线垂直），受光面确实就越亮。我们的常识是正确的。

让我们回到圆球体上来。

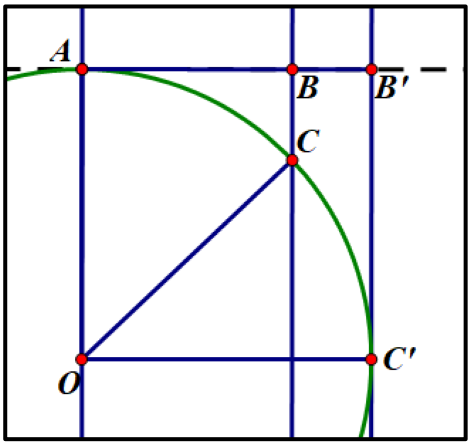

图 2.6

如图 2.6。以 O 为圆心，OA 为半径作圆（代表圆球体），AB 为该圆的切线且 AB⊥AO（AB 代表一个垂直于一束均匀的平行光的平面，显而易见 AO 平行于光线），OC=OA（圆弧 AC 为一个受光面）且∠AOC=44°，CB⊥AB，并如法炮制 OC’其中 OC’=OC=OA 并且∠AOC=∠COC’=44°，那么∠AOC’=88°（有 0°＜∠AOC＜∠AOC’＜90°）。由于圆弧 AC 和线段 AB 的含义并没有改变，所以上文中的结论 AC 的亮度（平均亮度）等于 AB 与 AC 的比值也仍然适用。那么可以发现，圆弧 AC=圆弧 CC’（受光面面积一样）但 AB＞BB’（接受的光线数量不一样），因此根据上文的公式，AC 一定比

CC’亮。这就是圆球体“明暗交界线”形成的原因。

接下来我们尝试去计算 AC 的平均亮度。如图 2.7，作 CD⊥AO，有∠CDA=∠DAB=∠ABC=90°，所以四边形 ABCD 是一个矩形，所以 AB=CD。由上述条件可知

$$\text{圆弧}AC = 2\pi AO \times \angle AOC \div 360$$

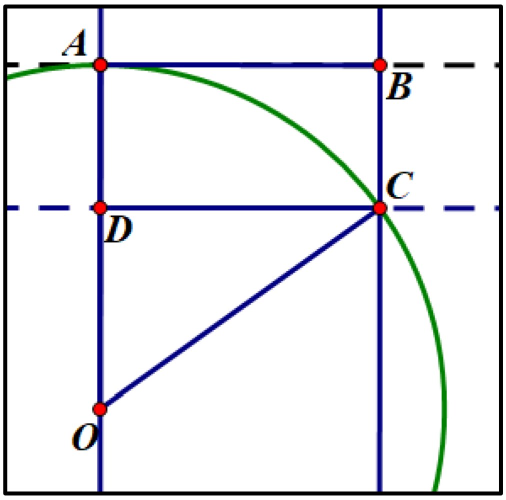

图 2.7

且由于三角形 OCD 是一个直角三角形，所以 $\frac{CD}{OC} = \sin \angle AOC$，可得$CD = OC \times \sin \angle AOC$，又因为 OC=OA，CD=AB，所以有

$$AB = AO \times \sin \angle AOC$$

因此可以计算出 AC 的平均亮度

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AO \times \sin \angle AOC}{2\pi AO \times \angle AOC \div 360}$$

化简得

$$\frac{AB}{AC} = \frac{180 \times \sin \angle AOC}{\pi \times \angle AOC}$$

这就是 AC 的平均亮度的计算公式。

如图 2.8，如果我们要求 CC’的平均亮度，该怎么办呢？此时

$$\text{圆弧}CC' = 2\pi AO \times \angle COC' \div 360$$

$$BB' = AB' - AB$$

展开 AB’和 AB 后得

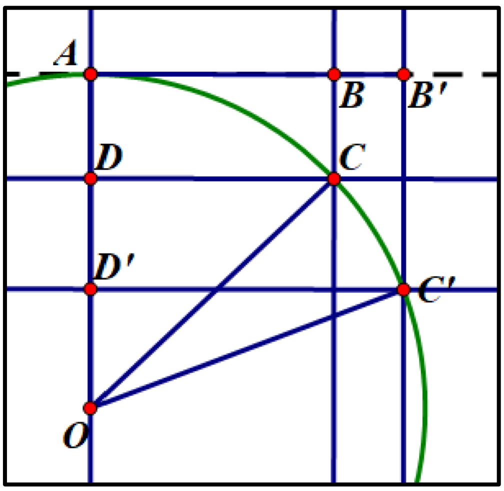

图 2.8

$$BB' = AO \times \sin\angle AOC' - AO \times \sin\angle AOC$$

化简得

$$BB' = AO \times (\sin\angle AOC' - \sin\angle AOC)$$

因此CC’的平均亮度为

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AO \times \left(\sin\angle AOC' - \sin\angle AOC\right)}{2\pi AO \times \angle COC' \div 360}$$

化简得

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{180 \times \left(\sin\angle AOC' - \sin\angle AOC\right)}{\pi \times \angle COC'}$$

此时有0°≤∠AOC<∠AOC’<90°，这就是圆球体表面上的任意一部分受光面的平均亮度计算公式。

三、 明暗渐变速度

上文中我们已经得出了圆球体表面上的任意一部分受光面的平均亮度计算公式。接下来我们以每1°的间隔在圆球体表面上的大受光面中划分了90个小受光面，每个小受光面的面积都是一样的。仍如图2.8，此时，∠COC’总是为1°，设∠AOC’为x，那么就有∠AOC总是等于x-1°，设小受光面CC’的平均亮度（BB’与CC’的比值）为y。将这些数据代入前文得出的公式，不难发现y只随x变化。那么，我们就可以说x是自变量，y是x的函数，解析式为

$$y = \frac{180 \times [\sin x - \sin(x-1)]}{\pi} \quad (1 \le x < 90)$$

其中，平均亮度y的值一定在0和1之间。

接着画出这个函数的图像（图3.1）。我们只观察x坐标在1到90之间的曲线。可见这段曲线是正弦波的一部分，且当x坐标匀速

增加时，y 坐标加速减少（球体表面加速变暗），但 y 坐标一直都在减少。按照我们对“明暗交界线”的定义，可以得出凡是光线能照射到的曲面都是明暗交界线的结论。至于为什么圆球体的明暗交界线看起来只有一小部分，那是因为接近光源的那一部分受光面变暗的速度较慢，亮度差别不太明显，因此不太容易被肉眼所察觉。

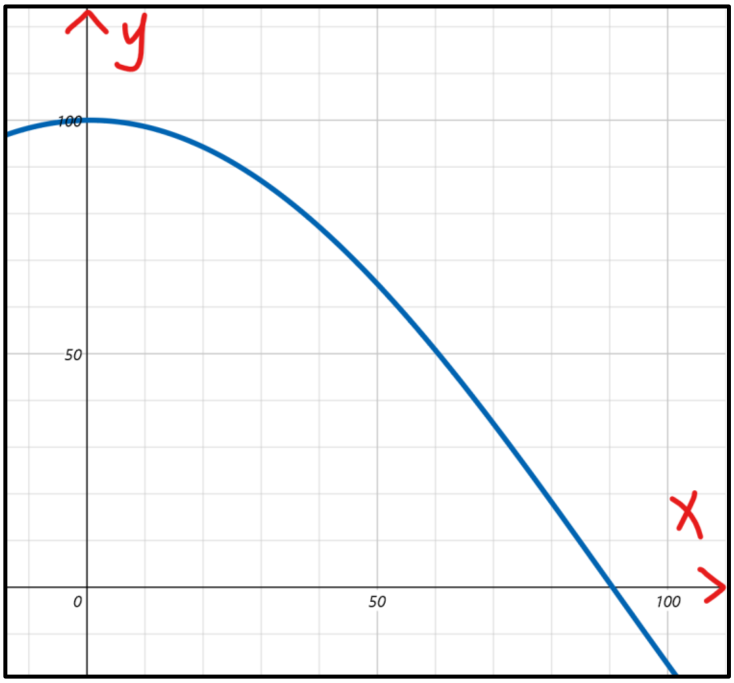

图 3.1 y 坐标放大了 100 倍的函数图像

四、 总结

明暗交界线的定义：均匀的平行光照射到曲面而形成的亮度渐变部分。

（凡是光线能照射到的曲面都是明暗交界线）

平面亮度的计算公式：

$$\frac{AB}{AC}$$

圆球体表面上的任意一部分受光面的平均亮度计算公式：

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{180 \times (\sin \angle AOC' - \sin \angle AOC)}{\pi \times \angle COC'}$$

$$（0° \leq \angle AOC < \angle AOC' < 90°）$$

五、 参考资料与所用软件

参考资料：https://tieba.baidu.com/p/1587768303

所用软件：Spline（图 1.1、图 2.2、图 2.3）；

Windows 画图（图 2.1）；

几何画板（图 2.4、图 2.5、图 2.6、图 2.7、图 2.8）；

Windows 计算器（图 3.1）。